数理解析研究所講究録
274巻 1976年 10-16

$\Gamma_\alpha(s, X)$ と特殊函数

学習院大 理　三井孝美

1972年のシンポジウムで,「Γ函数のある拡張」と題して, Siegelの積分の拡張でもある$\Gamma_\alpha(s,X)$を定義し, 2次の場合の性質を述べた. 今度は, 3次の場合の$\Gamma_\alpha(s,X)$の性質を調べてみよう. ただし, 話を簡単にするために, はじめは$6\alpha^{-1} \neq$ integer を仮定しておく.

$\Gamma_\alpha(s,X)$ は

$$\Gamma_\alpha(s,X) = \int_{Y>0} |Y|^{s-1} e^{-\sigma(Y^\alpha X)}\, dY, \qquad \begin{matrix}\alpha>0 \\ \Re s>0\end{matrix}$$

により定義されるのであった. ここでY^αは, Yを

$$Y = U'\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} U \qquad (U \text{ は直交行列})$$

と表わして

$$Y^\alpha = U'\begin{pmatrix} \lambda^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mu^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \nu^\alpha \end{pmatrix} U$$

により定義される。Γのパラメーターは3個で、具体的には Euler 角による回転の表現を利用する。このパラメーターを Φ, Θ, Ψ として、

$$\Gamma_\alpha(s, X) = \frac{4}{3} \sum{}' \int_0^{\pi/2} d\Phi \int_0^{\pi/2} \sin\Theta \, d\Theta \int_0^{\pi/2} d\Psi$$

$$\times \int_{0 \leqq \lambda \leqq \mu \leqq \nu} (\nu-\lambda)(\nu-\mu)(\mu-\lambda)(\lambda\mu\nu)^{s-1} e^{-a\lambda^\alpha - b\mu^\alpha - c\nu^\alpha} d\lambda \, d\mu \, d\nu$$

となる。$\sum{}'$ は、a, b, c のすべての順列にわたる和であり、a, b, c は、X と Φ, Θ, Ψ のある函数である。

λ, μ, ν をさらに極座標に変換して、変形すれば、

$$\Gamma_\alpha(s, X) = \frac{4}{3\alpha} \sum{}' \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{3s+3}{\alpha} + n\right)$$

$$\times \int_0^{\pi/2} d\Phi \int_0^{\pi/2} \sin\Theta \, d\Theta \int_0^{\pi/2} a^n h_n(s) \, d\Psi$$

$$+ \frac{4}{3} \sum{}' \Gamma\left(\frac{3s+3}{\alpha} + N\right) \int_0^{\pi/2} d\Phi \int_0^{\pi/2} \sin\Theta \, d\Theta \int_0^{\pi/2} \Psi_N(s) \, d\Psi$$

を得る。ここで

$$h_n(s) = \int_0^1 \frac{(1-v) v^{2s+\alpha n}}{(bv^\alpha + c)^{n+3(s+1)/\alpha}} dv \int_0^1 (1-u)(1-vu) u^{s-1+\alpha n} du$$

$\Psi_N(s)$ は $\Re s > \max(-\alpha N, -(\alpha N+1)/2)$ で正則な函数であり、一方 $h_n(s)$ は meromorphic であるから、$\Gamma_\alpha(s, X)$ も meromorphic であることがわかり、その pole の位置や residue などを調べることができる。

例えば

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \Gamma_\alpha(-1+\varepsilon, X) = 2\pi^2$$

$$\operatorname*{Res}_{s=-1} \Gamma_\alpha(s, X) = \frac{4}{\alpha} \sum{}' \int_0^{\pi/2} d\Phi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta$$

$$\times \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1}{3} \log\left(bc(b+c)^2\right) - \frac{\alpha b}{3(b+c)(1-\alpha)} F\left(1, 1, 2-\frac{1}{\alpha}; \frac{b}{b+c}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha b}{3(b+c)(1+\alpha)} F\left(1, 1, 2+\frac{1}{\alpha}; \frac{b}{b+c}\right) - \gamma \right\} d\Psi$$

ここで $F(a, b, c; z)$ は Gauss の超幾何級数であり、γ は Euler の常数である。

これらをさらに具体的に計算することは、非常に困難であるが、特に $X = E$（単位行列）の場合には計算が簡単になる。さらにこのときは、$\Gamma_\alpha(s, E)$ がある函数等式をみたすので、それを利用して、留数を次々にもとめていくことができる。実際、計算してみると、

$$\operatorname*{Res}_{s=0} \Gamma_\alpha(s,E) = \frac{\alpha^3}{2}\Gamma_\alpha(\alpha,E) + \frac{2\pi^2}{\alpha^2}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\left(2^{-1/\alpha}-2^{1/\alpha}\right)$$

$$+\frac{\pi^2}{\alpha}2^{-3/\alpha}\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right)$$

$$\operatorname*{Res}_{s=-1/2} \Gamma_\alpha(s,E) = -\frac{2^2\pi^2}{\alpha}\Gamma\left(\frac{3}{2\alpha}\right)$$

$$\operatorname*{Res}_{s=-\frac{1+\alpha}{2}} \Gamma_\alpha(s,E) = \frac{2\pi^2}{\alpha(1-\alpha^2)}\Gamma\left(\frac{3-\alpha}{2\alpha}\right)$$

$$\operatorname*{Res}_{s=-2} \Gamma_\alpha(s,E) = \frac{\alpha^3}{2}\Gamma_\alpha(\alpha-2,E)$$

$$+\frac{2^{1+1/\alpha}\pi^2}{\alpha^2}\left(2^{1/\alpha}-1\right)\Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(-\frac{2}{\alpha}\right)+\frac{\pi^2}{\alpha}2^{3/\alpha}\Gamma\left(-\frac{3}{\alpha}\right)$$

$$\operatorname*{Res}_{s=-1-\alpha/2} \Gamma_\alpha(s,E) = \frac{2^5\pi^{2+1/2}}{\alpha(4-\alpha^2)}$$

$$\operatorname*{Res}_{s=-3/2} \Gamma_\alpha(s,E) = -\frac{2^2\pi^2}{\alpha}\Gamma\left(-\frac{3}{2\alpha}\right)$$

$$\operatorname*{Res}_{s=-\frac{3+\alpha}{2}} \Gamma_\alpha(s,E) = \frac{2^3\pi^2}{\alpha(1-\alpha^2)}\Gamma\left(-\frac{3+\alpha}{2\alpha}\right)$$

さらに

$$\operatorname*{Res}_{s=-\alpha n} \Gamma_\alpha(s,E) = \frac{\alpha^2}{n(1-\alpha n)(2-\alpha n)}\operatorname*{Res}_{s=-\alpha(n-1)} \Gamma_\alpha(s,E) +$$

$$+\frac{(-1)^n \pi^2\, 2^{1+2n-3/\alpha}}{\alpha(1-\alpha n)(2-\alpha n)\, n!}\,\Gamma\!\left(\frac{3}{\alpha}-2n\right)$$

$(n=1,2,\cdots)$

などが得られる。

$s=-1$ は order が 2 の pole であり、そこでは

$$\operatorname*{Res}_{s=-1}\Gamma_\alpha(s,E)=\frac{2\pi^2}{\alpha}\left\{2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\alpha n}{\alpha^2n^2-1}-2\log 2-3\gamma\right\}$$

これと、函数等式から得られる $\operatorname*{Res}_{s=-1}$ を比較して

$$\Gamma_\alpha(\alpha-1,E)=\frac{2\pi^3}{\alpha^4}\left(2^{1/\alpha}-2^{-1/\alpha}\right)\frac{1}{\sin\pi/\alpha}$$

$$+\frac{2\pi^2}{\alpha^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha n}{\alpha^2n^2-1}$$

を得る。

以上のほかに、特に $\Gamma_\alpha(1,E)$ の値は、分割問題に関係するものであって、それを求めてみると、

$$\Gamma_2(1,E)=\frac{\sqrt{2}\,\pi-4}{16}\pi^2,$$

$$\Gamma_3(1,E)=\frac{4\pi^2}{9}\left\{\log 2-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2^{2/3}-2^{1/3}\right)\left(\tan^{-1}\frac{2^{1/3}-1}{\sqrt{3}}+\frac{3\pi}{4}\right)\right\}$$

などが得られる。

今度は α の仮定を変えて、 $\alpha^{-1} = m = \text{integer}$ の場合を考えると、次の結果が得られる：

X の固有値の基本対称式を $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ として（$\sigma_1 = \sigma(X)$, $\sigma_3 = |X|$ である），

$$\delta_1 = \frac{\sigma_1}{3\,\sigma_3^{1/3}}, \qquad \delta_2 = \frac{\sigma_2}{3\,\sigma_3^{2/3}}$$

とおくとき，

$$\Gamma_{\frac{1}{m}}(s, X) = \pi^2 \frac{m^3}{2^{2ms}} \Gamma(2ms)\Gamma(ms+1)\,|X|^{-ms-m}$$

$$\times \sum_{i+2j \leqq 3m-3} P_{ij}^{(m)}(s)\, \delta_1^i \delta_2^j$$

ここで $P_{ij}^{(m)}$ は s の多項式で、次数は $3m-3$ をこえない。

例をあげれば

$$\Gamma_{\frac{1}{2}}(s, X) = 2^{1-4s}\pi^2\,\Gamma(2s)\Gamma(4s+3)$$

$$\times \{ 2(9\delta_1\delta_2 - 1)s + 3(6\delta_1\delta_2 - 1) \}\, |X|^{-2s-2}$$

$$\Gamma_{\frac{1}{3}}(s, X) = 2^{-2-6s}\, 3^4 \pi^2\, \Gamma(3s)\Gamma(6s+3)$$

$$\times (3s+2)\left\{ 3^5\left(3s^3 + \frac{17}{2}s^2 + \frac{15}{2}s + 2\right)\delta_1^2\delta_2^2 \right.$$

$$-3^5\left(s^3+3s^2+\frac{11}{4}s+\frac{3}{4}\right)\delta_1^3$$

$$-3^3\left(3^2s^3+3^3s^2+26s+8\right)\delta_2^3$$

$$-3^2\left(12s^2+5s-3\right)\delta_1\delta_2-1\quad\Big\}$$

以上いくつかの結果以外にも，$\Gamma_\alpha(s,X)$の問題として，例えば，留数和の問題，Mellin変換に対応するような変換の問題，$\Gamma_\alpha(s,X)$のsを多変数に拡張する問題などが考えられるが，いずれもまだ発端だけであって，はっきりした線まで到達していないので，ここではすべて省略し，またの機会をまつことにしたい。